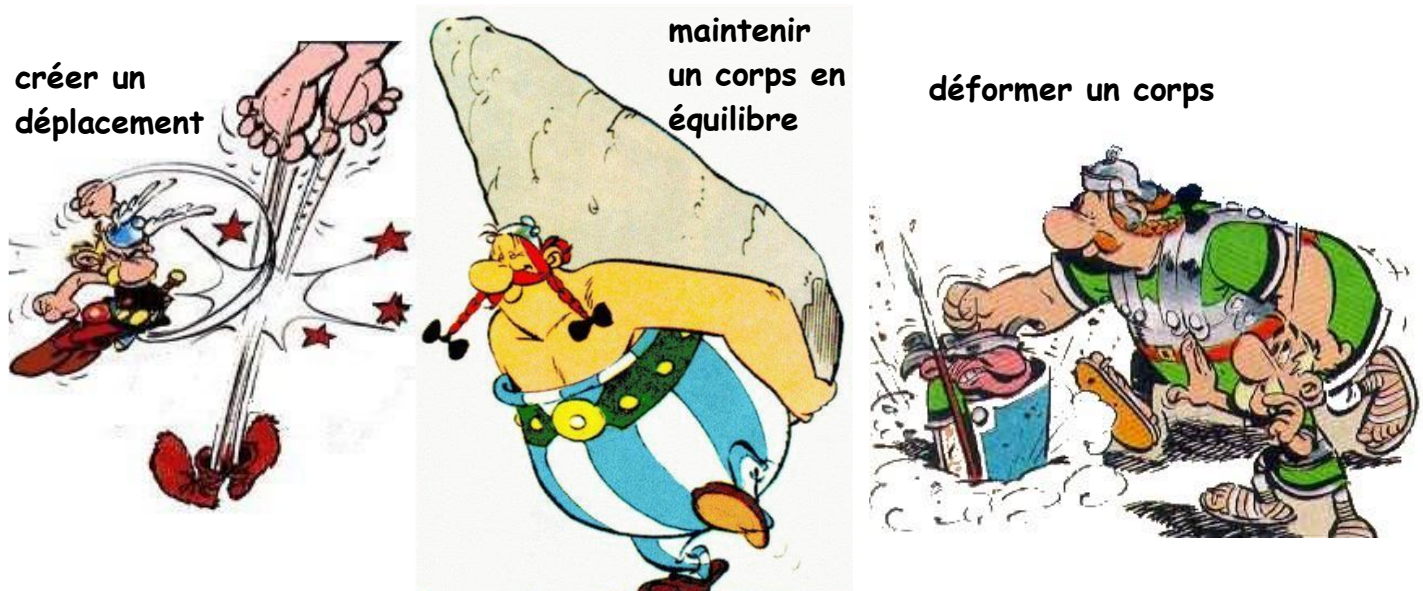


itec	Lycée SC	MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES	COURS
			CHAPITRE 3

I – DEFINITION D'UNE ACTION MECANIQUE (A.M.)

Une A.M. est un phénomène physique capable de :



On distingue :

- Les A.M. **de contact** ou **surfaciques**, exercées par un solide sur un autre solide par l'intermédiaire de leur surface de contact.
- Les A.M. **à distance** ou **volumique**, qui s'exercent sur tous les éléments de volume du solide sans qu'il y ait besoin de contact (ex : action de la pesanteur, forces magnétiques).

Remarque importante :

Si un système 1 exerce sur un système 2 une A.M., alors le système 2 exerce sur le système 1 une A.M. exactement opposée.

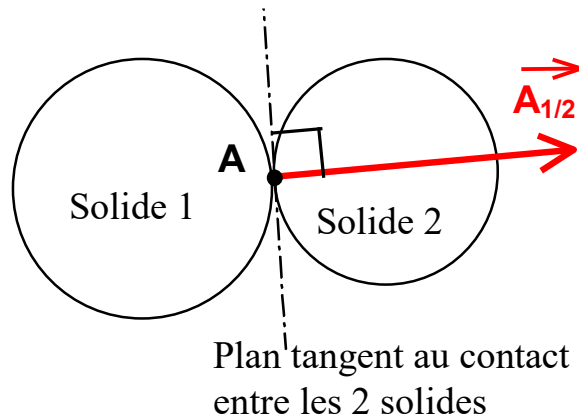
C'est ce que l'on appelle le **principe de réciprocité**.

Ex : une balle de tennis exerce sur la raquette une A.M. exactement opposée à celle qu'exerce la raquette sur la balle.

II – UNE A.M. PARTICULIERE : LA FORCE

21 – Définition /

Une **force** est l'action qu'exerce un solide sur un autre solide lorsqu'ils sont **en liaison ponctuelle**.



22 – Caractéristiques :

La force est définie par :

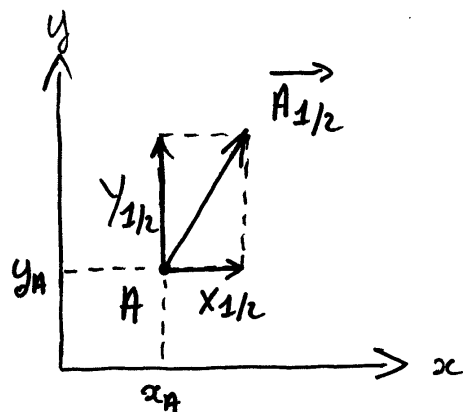
- un **point d'application** : le point de contact entre les 2 solides (ici le point A)
- une **direction** : normale (=perpendiculaire) au plan tangent au contact.
- un **sens** : du solide 1 vers le solide 2 s'il s'agit de l'A.M. de 1 sur 2.
- une **intensité** exprimée en Newton (N)

23 – Modèle mathématique :

Le modèle mathématique de la force est le **vecteur lié**, c'est à dire un vecteur auquel on associe un **point origine**.

On utilisera la notation suivante :

$\overrightarrow{A_{1/2}}$ pour la force exercée en A
par le solide 1 sur le solide 2 :



Les propriétés algébriques de ce vecteur lié sont alors les suivantes :

	Coordonnées du point d'application (en mm ou en m)	Composantes algébriques du vecteur (en N)	Norme du vecteur = intensité de la force (en N)
En 2D	$A \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \end{pmatrix}$	$\vec{A}_{1/2} \begin{pmatrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \end{pmatrix}$	$\ \vec{A}_{1/2}\ = \sqrt{X_{1/2}^2 + Y_{1/2}^2}$
En 3D	$A \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$	$\vec{A}_{1/2} \begin{pmatrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \\ Z_{1/2} \end{pmatrix}$	$\ \vec{A}_{1/2}\ = \sqrt{X_{1/2}^2 + Y_{1/2}^2 + Z_{1/2}^2}$

III – UNE AUTRE A.M. PARTICULIERE : LE POIDS D'UN SOLIDE

La **pesanteur** ou **attraction terrestre** agit sur chaque petit élément constituant un solide. La somme de ces petites actions mécaniques élémentaires est équivalente à une **force** dont les caractéristiques sont les suivantes :

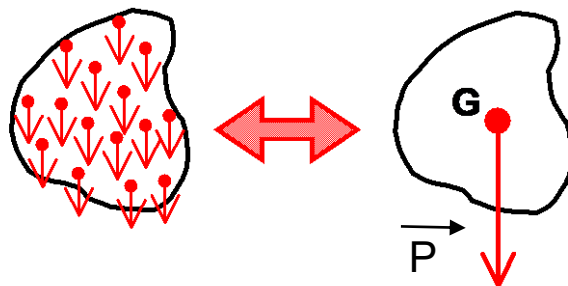
→ point d'application : **G**, **centre de gravité** du solide

→ direction : **Verticale**

→ sens : **Vers le bas**

→ intensité : $\|\vec{P}\| = \mathbf{m \cdot g}$ en Newton (N)
 m : masse du solide en Kg
 g : accélération de la pesanteur en $m \cdot s^{-2}$
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Cette force notée $\vec{P}$ s'appelle le **poide**s du solide :

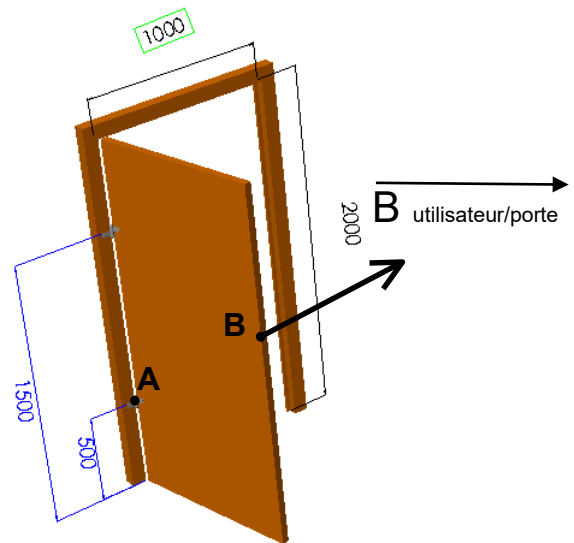


IV – MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT

41 – Signification physique du moment d'une force

Le **moment** d'une force par rapport à un point est un outil qui permet de mesurer la capacité de cette force à créer un mouvement rotation autour de ce point.

Ex : le moment de la force de l'utilisateur par rapport au point A est sa capacité à faire tourner la porte autour du point A :

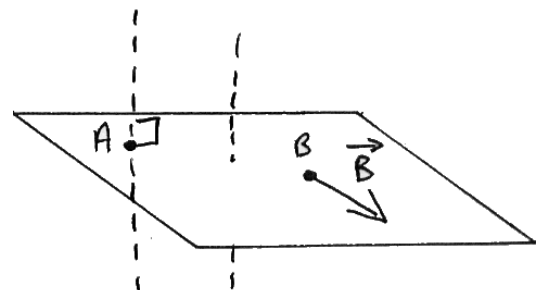
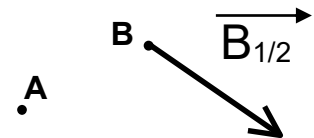


42 – Modèle mathématique du moment d'une force

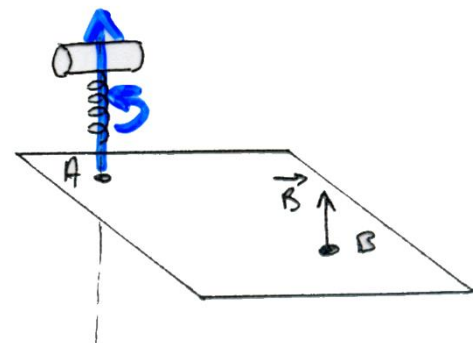
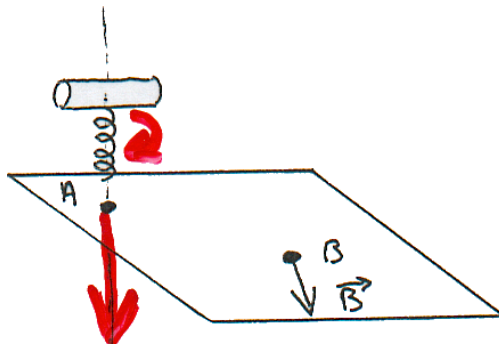
On considère une force appliquée en un point B et un point A quelconque.

Le **moment** de $\vec{B}_{1/2}$ par rapport au point A est un **vecteur** noté $M_A \vec{B}_{1/2}$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

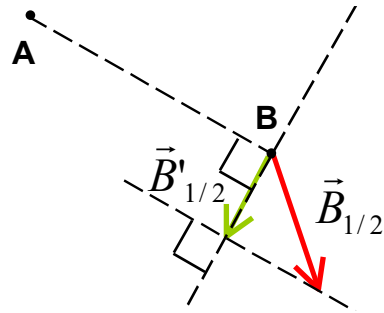
→ **direction** : perpendiculaire au plan contenant le point A et la force $\vec{B}_{1/2}$:



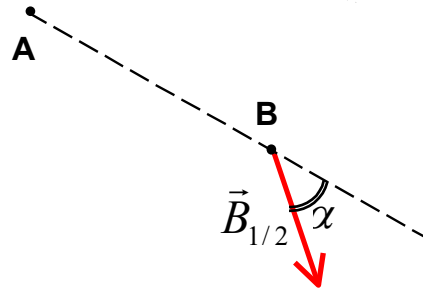
→ **sens** : on applique la **règle du « tire-bouchon »** en considérant que $\vec{B}_{1/2}$ fait tourner le tire-bouchon autour de la normale au plan en A. :



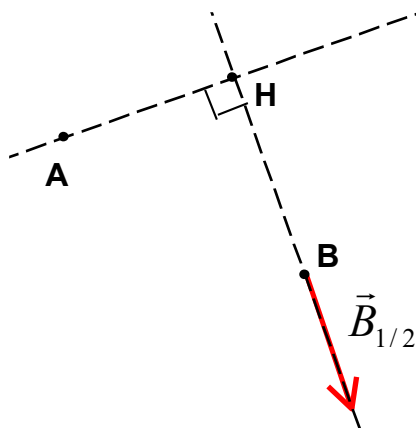
→ **intensité** : elle s'exprime en Newton mètre (N.m) et on a 3 façons équivalentes de la déterminer :



$$\| \vec{M}_A \vec{B}_{1/2} \| = AB \cdot \| \vec{B}'_{1/2} \|$$



$$\| \vec{M}_A \vec{B}_{1/2} \| = AB \cdot \| \vec{B}_{1/2} \| \cdot \sin \alpha$$



$$\| \vec{M}_A \vec{B}_{1/2} \| = AH \cdot \| \vec{B}_{1/2} \|$$

AH représente « le bras de levier ».

43 - Détermination analytique du moment d'une force

$$\vec{M}_A \vec{B}_{1/2} = \vec{AB} \wedge \vec{B}_{1/2}$$

Si les coordonnées des vecteurs et des points sont les suivantes :

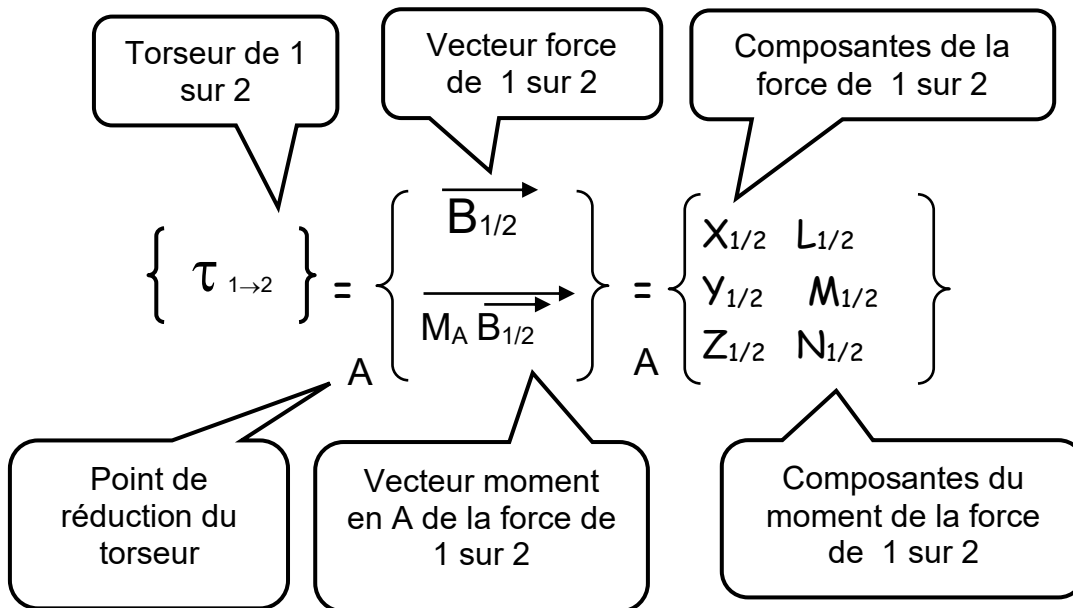
$$\vec{M}_A \vec{B}_{1/2} \begin{vmatrix} L_{1/2} \\ M_{1/2} \\ N_{1/2} \end{vmatrix} \quad \vec{AB} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \vec{B}_{1/2} \begin{vmatrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \\ Z_{1/2} \end{vmatrix}$$

Alors :

$$\vec{M}_A \vec{B}_{1/2} \begin{vmatrix} L_{1/2} \\ M_{1/2} \\ N_{1/2} \end{vmatrix} \begin{matrix} = b.Z_{1/2} - c.Y_{1/2} \\ = c.X_{1/2} - a.Z_{1/2} \\ = a.Y_{1/2} - b.X_{1/2} \end{matrix}$$

V – MODELISATION D'UNE FORCE PAR UN TORSEUR

On peut modéliser la force à l'aide d'un **torseur** :



VI – MODELISATION D'UNE A.M. QUELCONQUE PAR UN TORSEUR

Toute action mécanique (force ou autre) exercée sur un système S par une entité E extérieure à S peut être modélisée par un torseur :

$$\left\{ \tau_{E \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{E/S} \\ \overrightarrow{M_A E/S} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_{E/S} & L_{E/S} \\ Y_{E/S} & M_{E/S} \\ Z_{E/S} & N_{E/S} \end{array} \right\}_A$$

$\vec{R}_{E/S}$ est la **résultante** de l'A.M. de E sur S

$\overrightarrow{M_A E/S}$ est le **moment résultant** au point A de l'A.M. de E sur S

Remarques : ○ Un même torseur peut s'écrire en n'importe quel point :

$$\left\{ \tau_{E \rightarrow S} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{E/S} \\ \overrightarrow{M_A E/S} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{E/S} \\ \overrightarrow{M_B E/S} \end{array} \right\}_B$$

Son expression varie mais il modélise toujours la même A.M.

- La résultante d'un torseur est **invariante** (ne change pas) quel que soit le point auquel on exprime le torseur.

- $\left\{ \tau_{E \rightarrow S} \right\}$ est souvent la somme des torseurs des forces élémentaires qu'exerce $\vec{E}$ sur S .

On peut faire la somme de 2 torseurs uniquement s'ils sont **exprimés au même point** (même point de réduction). Dans ce cas on additionne les résultantes entre elles et les moments entre eux :

$${}_A \left\{ \begin{array}{cc} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{array} \right\} + {}_A \left\{ \begin{array}{cc} X_2 & L_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{cc} X_1 + X_2 & L_1 + L_2 \\ Y_1 + Y_2 & M_1 + M_2 \\ Z_1 + Z_2 & N_1 + N_2 \end{array} \right\}$$

- Le Principe des actions réciproques stipule que l'A.M. d'un système E sur un système S est exactement opposée à l'A.M. de S sur E :

$$\left\{ \tau_{E \rightarrow S} \right\} = - \left\{ \tau_{S \rightarrow E} \right\}$$

$${}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{E/S}} \\ \overrightarrow{M_A E/S} \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R_{S/E}} \\ -\overrightarrow{M_A S/E} \end{array} \right\}$$

VII – CHANGEMENT DU POINT DE REDUCTION D'UN TORSEUR

Lorsqu'on change le point de réduction d'un torseur, seule l'expression du moment résultant varie.

La **loi du transfert des moments** permet alors, connaissant le moment de l'A.M. en un point, de déterminer le moment en n'importe quel point :

$$\overrightarrow{M_A 1/2} = \overrightarrow{M_B 1/2} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{1/2}}$$

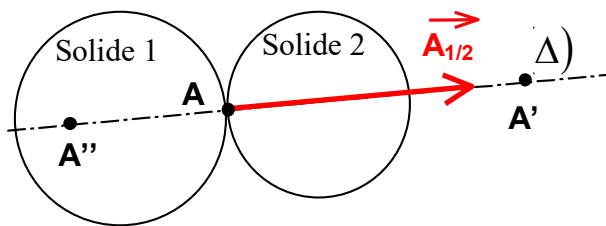
VIII – TORSEURS PARTICULIERS

81 – Le torseur glisseur

Un **torseur glisseur** est un torseur qui peut toujours s'écrire avec un **moment résultant nul**, à condition qu'on l'exprime en un point d'une droite particulière appelée **axe principal** du torseur :

$$\left\{ \tau_{1 \rightarrow S} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{E/S} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_{E/S} & 0 \\ Y_{E/S} & 0 \\ Z_{E/S} & 0 \end{array} \right\}_A$$

Les A.M. de type force sont modélisables par des glisseurs. En effet, quel que soit le point de la droite d'action de la force où l'on exprime le torseur, son moment résultant est nul :



$$\left\{ \tau_{1 \rightarrow 2} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{A}_{1/2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{array} \right\}_{A'} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{array} \right\}_{A''}$$

82 – Le torseur couple

Un **torseur couple** est un torseur dont la résultante est nulle quel que soit le point auquel on l'exprime :

$$\left\{ \tau_{1 \rightarrow 2} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_{A \ 1/2} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C}_{1/2} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{1/2} \\ 0 & M_{1/2} \\ 0 & N_{1/2} \end{array} \right\}_A$$

D'après la loi du transfert des moments :

$$\vec{M}_{B \ 1/2} = \vec{M}_{A \ 1/2} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1/2} = \vec{M}_{A \ 1/2} + \vec{BA} \wedge \vec{0} = \vec{M}_{A \ 1/2}$$

Donc l'expression d'un torseur couple reste la même quel que soit son point de réduction.

l'A.M. qu'exerce le stator d'un moteur électrique sur son rotor peut être modélisée par un torseur couple

IX – A.M. TRANSMISSIBLES PAR LES LIAISONS USUELLES

91 – Cas des liaisons parfaites

On dit que des liaisons sont « parfaites » si on considère qu'il n'y pas de **frottement**, c'est à dire qu'il n'y a aucune résistance aux déplacements autorisés par la liaison.

Lorsque 2 pièces (ou groupes cinématiques) sont liées par une liaison usuelle parfaite, la forme de l'A.M. qu'elles peuvent exercer l'une sur l'autre dépend de la nature de la liaison (voir tableau).

Si la liaison permet un mouvement de **translation** suivant une direction, **aucune résultante** ne peut alors être transmise suivant cette direction.

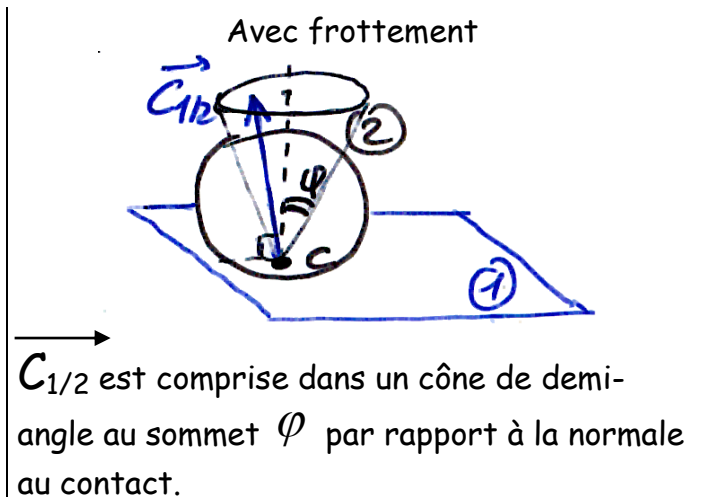
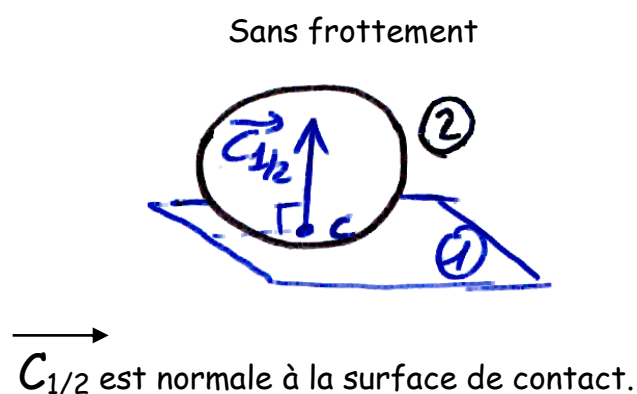
Si la liaison permet un mouvement de **rotation** autour d'un axe, **aucun moment** ne peut alors être transmis selon cet axe.

92 – Cas des contacts avec frottements

Jusqu'à présent nous avons considéré les liaisons comme parfaites, c'est à dire sans efforts dus au frottement.

Dans la réalité, les frottements vont créer des efforts supplémentaires qui s'opposent aux déplacements.

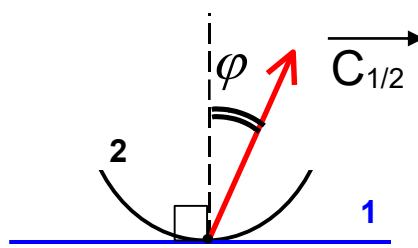
ex : contact ponctuel



Le **coefficient de frottement** $f = \tan \varphi$ dépend essentiellement du couple de matériaux en contact.

Tant que $\vec{C}_{1/2}$ est à l'intérieur du cône de frottement d'angle φ , il n'y a pas glissement possible entre les solides 1 et 2 (on dit qu'il y a adhérence).

Lorsqu'il y a glissement entre 1 et 2, $\vec{C}_{1/2}$ se trouve en limite du cône d'adhérence et fait donc un angle φ avec la normale au contact :



Nature de la liaison et position par rapport au repère	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Mouvements possibles	Torseur transmissible $\{\tau_{1/2}\}$ au point A
Encastrement R quelconque			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Glissière d'axe (A,X)			$\begin{Bmatrix} T_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Pivot d'axe (A,Z)			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot glissant d'axe (A,Z)			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & R_z \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Rotule de centre A			$\begin{Bmatrix} 0 & R_x \\ 0 & R_y \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire de centre A et d'axe (A,Y)			$\begin{Bmatrix} 0 & R_x \\ T_y & R_y \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Appui plan de normale (A,Y)			$\begin{Bmatrix} T_x & 0 \\ 0 & R_y \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Linéaire rectiligne de normale (A,Y) et de droite de contact (A,X)			$\begin{Bmatrix} T_x & R_x \\ 0 & R_y \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Ponctuelle de normale (A,X)			$\begin{Bmatrix} 0 & R_x \\ T_y & R_y \\ T_z & R_z \end{Bmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$